第26卷 第6期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 6
2009年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2009

**文章编号**:1005-3085(2009)06-0990-07

# 具有非负困难度的符号几何规划的一种分解方法*

张晓梅， 王燕军

(上海财经大学应用数学系，上海 200433)

**摘　要**: 本文针对具有非负困难度的符号几何规划问题提出了一种新的分解方法。该方法首先利用指数变换及矩阵理论，将原问题等价地转化为一个非线性程度较低的可分离规划，然后，将所得等价问题分解成一系列易于求解的子问题，并且当困难度为零时，文中给出了求解子问题精确解的方法。最后，通过数值实例验证了新方法的有效性和可行性。

**关键词**: 符号几何规划；困难度；正项几何规划

**分类号**: **AMS**(2000) 65K05; 90C30　　**中图分类号**: O221.2　　**文献标识码**: A

## 1　引言

符号几何规划作为一类特殊的非线性规划，已广泛应用于产品设计、任务管理、化学过程设计等实际问题中，为最优设计提供了有力的工具。符号几何规划的局部优化方法很多[1-4]，但每种方法都有各自的缺点，如伪对偶法会产生严重的数值困难，压缩算法虽然优于对偶算法，但又存在收敛速度慢的缺点。针对这种情况，本文在文献[5]的基础上，提出了符号几何规划的一种分解方法。利用矩阵分块理论，将原问题等价的转化为非线性程度很低的可分离规划，在求出此问题的最优解后，利用原始变换就可得到原问题的最优解。为今后求解大规模的几何规划问题提供了一种方法。

符号几何规划的标准形式为目标函数为单项式的反向正项几何规划

$$(RPG):\quad \begin{aligned} \min\quad & x_0 \\ \text{s.t.}\quad & f_m(x) \le 1, \quad m=1,2,\cdots,p \\ & f_m(x) \ge 1, \quad m=p+1,p+2,\cdots,M \\ & x>0, \end{aligned}$$

其中

$$f_m(x)=\Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt}\Pi_{n=1}^{N'} x_n^{\gamma_{mtn}},$$

$T_m$ 是函数 $f_m(x)$ 的项数；$C_{mt}>0$，$\gamma_{mtn}$ 为任意给定的实数。$f_m(x)$ 为正项式。

## 2　变换与分散

**引理1**　如果对规划 $(RPG)$ 连续作两次变换 $x_n=\mathrm{e}^{y_n}$ $(n=0,1,\cdots,N')$ 及

$$\Sigma_{n=0}^{N'}\gamma_{mtn}y_n=\log z_{mt},\quad m=1,\cdots,M,$$

**收稿日期**: 2007-11-12.　**作者简介**: 张晓梅 (1972年1月生)，女，博士，副教授. 研究方向：随机优化.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10601030)；上海财经大学“十五”、“211工程”重点学科建设项目.

则规划 $(RPG)$ 有解的充要条件是存在向量 $y$ 及 $z$，使下面规划有解

$$\begin{aligned}
\min \quad & y_0 \\
\text{s.t.} \quad & \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} z_{mt} \le 1, \quad m = 1, 2, \cdots, p \\
& \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} z_{mt} \ge 1, \quad m = p+1, p+2, \cdots, M \\
& \Gamma y = \log z, \\
& z > 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\log z = (\log z_{11}, \cdots, \log z_{1T_1}, \cdots, \log z_{m1}, \cdots, \log z_{mT_m}, \cdots, \log z_{M1}, \cdots, \log z_{MT_M})^T$,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{110} & \gamma_{111} & \cdots & \gamma_{11N'} \\ \gamma_{120} & \gamma_{121} & \cdots & \gamma_{12N'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{MT_M0} & \gamma_{MT_M1} & \cdots & \gamma_{MT_MN'} \end{bmatrix}.$$

证明 (必要性)　若规划 (RPG) 有解，则存在 $x > 0$，满足

$$\begin{cases} f_m(x) \le 1, & m = 1, 2, \cdots, p \\ f_m(x) \ge 1, & m = p+1, p+2, \cdots, M. \end{cases} \tag{2}$$

作变换，令 $x_n = \mathrm{e}^{y_n}$ $(n = 0, 1, \cdots, N')$，并代入 (2) 中，则得

$$\begin{cases} \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} \Pi_{n=0}^{N'} \mathrm{e}^{\gamma_{mtn} y_n} = \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} \mathrm{e}^{\Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{mtn} y_n} \le 1, & m = 1, 2, \cdots, p \\ \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} \Pi_{n=0}^{N'} \mathrm{e}^{\gamma_{mtn} y_n} = \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} \mathrm{e}^{\Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{mtn} y_n} \ge 1, & m = p+1, p+2, \cdots, M \end{cases} \tag{3}$$

再作变换，令 $\Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{mtn} y_n = \log z_{mt}$，则得到 $y$ 及 $z$，满足 (1) 中不等式。又因为

$$\Gamma y = \Gamma \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{11n} y_n \\ \vdots \\ \Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{MT_Mn} y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log z_{11} \\ \vdots \\ \log z_{MT_M} \end{bmatrix} = \log z$$

且 $x_0 = \mathrm{e}^{y_0}$，所以 $\min\ x_0$ 等价于 $\min\ y_0$。

(充分性)　若存在向量 $y$ 及 $z$，使规划 (1) 有解。根据 $\Gamma y = \log z$ 知 $z_{mt} = \mathrm{e}^{\Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{mtn} y_n}$，于是

$$\Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} z_{mt} = \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} \mathrm{e}^{\Sigma_{n=0}^{N'} \gamma_{mtn} y_n},$$

令 $x_n = \mathrm{e}^{y_n}$，则结论成立。

下面我们就困难度 $d = 0$ 及 $d > 0$ 两种情况分别讨论规划 (1) 的分解结果，其中困难度定义为

$$d = \Sigma_{m=1}^{M} T_m - (N+1) \triangleq S - (N'+1).$$

**(I)** $d=0$ **的情形**

此时 $\Gamma$ 为 $(N'+1)\times(N'+1)$ 阶矩阵，不妨假设 $\Gamma$ 的秩为 $(N'+1)$，即 $\Gamma$ 是一个非奇异矩阵。于是有 $y=\Gamma^{-1}\log z$，根据引理，规划 (1) 就等价于如下具有线性约束的可分离规划

$$\begin{aligned}\min\quad & e^T\Gamma^{-1}\log z\\ \text{s.t.}\quad & \Sigma_{t=1}^{T_m}C_{mt}z_{mt}\le 1,\quad m=1,2,\cdots,p\\ & \Sigma_{t=1}^{T_m}C_{mt}z_{mt}\ge 1,\quad m=p+1,p+2,\cdots,M\\ & z>0,\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $e=(1,0,\cdots,0)^T$ 为 $(N'+1)$ 维列向量。

**(II)** $d>0$ **的情形**

此时矩阵 $\Gamma$ 的行数大于列数，即 $S>N'+1$。不妨假设前 $N'+1$ 行线性无关。设

$$\Gamma=\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix},$$

其中 $B$ 是 $(N'+1)\times(N'+1)$ 阶非奇异矩阵，相应的设

$$\log z=\begin{bmatrix}\log z_B\\ \log z_D\end{bmatrix}.$$

由 $\Gamma y=\log z$ 可得

$$\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}\log z_B\\ \log z_D\end{bmatrix}.$$

根据引理 1，规划 (1) 等价于如下规划

$$\begin{aligned}\min\quad & e^TB^{-1}\log z_B\\ \text{s.t.}\quad & DB^{-1}\log z_B=\log z_D\\ & \Sigma_{t=1}^{T_m}C_{mt}z_{mt}\le 1,\quad m=1,2,\cdots,p\\ & \Sigma_{t=1}^{T_m}C_{mt}z_{mt}\ge 1,\quad m=p+1,p+2,\cdots,M\\ & z>0.\end{aligned}\tag{5}$$

## 3 子问题的求解

**(I) 规划 (4) 的求解**

设 $e^T\Gamma^{-1}=(u_{11},u_{12},\cdots,u_{1T_1},\cdots,u_{M1},u_{M2},\cdots,u_{MT_M})$，则规划 (4) 的最优值可通过求解下列 $M$ 个子问题获得

$$(P_1):\ \begin{aligned}\min\quad & \Sigma_{t=1}^{T_1}u_{1t}\log z_{1t}\\ \text{s.t.}\quad & \Sigma_{t=1}^{T_1}C_{1t}z_{1t}\le 1\\ & z_{1t}>0\end{aligned}\ ,\quad\cdots,\quad (P_p):\ \begin{aligned}\min\quad & \Sigma_{t=1}^{T_p}u_{pt}\log z_{pt}\\ \text{s.t.}\quad & \Sigma_{t=1}^{T_p}C_{pt}z_{pt}\le 1\\ & z_{pt}>0\end{aligned}$$

$$(P_{p+1}):\quad \begin{array}{ll} \min & \Sigma_{t=1}^{T_{p+1}} u_{(p+1)t}\log z_{(p+1)t} \\ \text{s.t.} & \Sigma_{t=1}^{T_{p+1}} C_{(p+1)t} z_{(p+1)t} \ge 1 \\ & z_{(p+1)t} > 0 \end{array} ,\quad \cdots,\quad (P_M):\quad \begin{array}{ll} \min & \Sigma_{t=1}^{T_M} u_{Mt}\log z_{Mt} \\ \text{s.t.} & \Sigma_{t=1}^{T_M} C_{Mt} z_{Mt} \ge 1 \\ & z_{Mt} > 0 \end{array}$$

在此基础上，我们分三种情况讨论子问题 $(P_j)$，$j=1,2,\cdots,p$，的解：

(i)　若 $u_{jt}=0$，$t=1,2,\cdots,T_j$，则子问题 $(P_j)$ 的最优值为 0，且 $z_j^*=(z_{j1}^*,z_{j2}^*,\cdots,z_{jT_j}^*)$ 是子问题 $(P_j)$ 的任何可行解；

(ii)　若 $u_{jt}\le 0$，$t=1,2,\cdots,T_j$，其中至少有一个不等式严格成立。

将目标函数改写为

$$\Sigma_{t=1}^{T_j} u_{jt}\log z_{jt} = -\Sigma_{t=1}^{T_j}\log z_{jt}^{-u_{jt}} = -\log\left(\Pi_{t=1}^{T_j} z_{jt}^{-u_{jt}}\right),$$

由于 $\Pi_{t=1}^{T_j} z_{jt}^{-u_{jt}}$ 是关于 $z_{jt}$ 的单调增函数，且 $z_{jt}$ 满足约束 $\Sigma_{t=1}^{T_j} C_{jt} z_{jt}\le 1$，因此满足

$$\Sigma_{t=1}^{T_j} C_{jt} z_{jt} = 1$$

的 $z_{jt}^*$ 为最优解。

又根据文献 [6]，得

$$\Pi_{t=1}^{T_j} z_{jt}^{-u_{jt}} = \frac{\Pi_{t=1}^{T_j}\left(\frac{c_{jt}z_{jt}}{-u_{jt}}\right)^{-u_{jt}}}{\Pi_{t=1}^{T_j}\left(\frac{c_{jt}}{-u_{jt}}\right)^{-u_{jt}}} \le \frac{\left[\frac{\Sigma_{t=1}^{T_j} c_{jt}z_{jt}}{-\Sigma_{t=1}^{T_j} u_{jt}}\right]^{-\Sigma_{t=1}^{T_j} u_{jt}}}{\Pi_{t=1}^{T_j}\left(\frac{c_{jt}}{-u_{jt}}\right)^{-u_{jt}}},$$

当且仅当

$$\frac{c_{j1}z_{j1}}{-u_{j1}} = \frac{c_{j2}z_{j2}}{-u_{j2}} = \cdots = \frac{c_{jT_j}z_{jT_j}}{-u_{jT_j}}$$

时等号成立。故子问题 $(P_j)$ 的最优解为

$$z_{jt}^* = \frac{u_{jt}}{c_{jt}\Sigma_{t=1}^{T_j} u_{jt}},\quad t=1,2,\cdots,T_j,$$

最优值为

$$\log\left(\Pi_{t=1}^{T_j}\left(\frac{u_{jt}}{c_{jt}}\right)^{u_{jt}}(\Sigma_{t=1}^{T_j} u_{jt})^{-(\Sigma_{t=1}^{T_j} u_{jt})}\right).$$

(iii)　若至少存在一个 $u_{jt_0}>0$，则令 $z_{jt_0}\to 0$，有 $u_{jt_0}\log(z_{jt_0})\to-\infty$，于是子问题 $(P_j)$ 无解。

同样，我们分三种情况讨论子问题 $(P_j)$，$j=p+1,p+2,\cdots,M$，的解：

(i)　若 $u_{jt}=0$，$t=1,2,\cdots,T_j$，则子问题 $(P_j)$ 的最优值为 0，且 $z_j^*$ 是子问题 $(P_j)$ 的任何可行解；

(ii)　若 $u_{jt}\ge 0$，$t=1,2,\cdots,T_j$，其中至少有一个不等式严格成立。当 $T_j=1$ 时，最优解 $z_j^*=\frac{1}{c_{j1}}$，最优值为 $-u_{j1}\log c_{j1}$。若 $T_j\ge 2$，不妨设 $u_{jt_0}>0$。令 $z_{jt_0}\to 0$，有 $u_{jt_0}\log(z_{jt_0})\to-\infty$，于是子问题 $(P_j)$ 无解；

(iii)　若至少存在一个 $u_{jt_0}<0$，则令 $z_{jt_0}\to+\infty$，有 $u_{jt_0}\log(z_{jt_0})\to-\infty$，于是子问题 $(P_j)$ 无解。

**(II)　规划 (5) 的求解**

将规划 (5) 中的约束条件拆成两部分，记为

$$\begin{aligned} \min \quad & e^T B^{-1} \log z_B \\ \text{s.t.} \quad & \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} z_{mt} \le 1, \quad m = 1, 2, \cdots, p \\ & \Sigma_{t=1}^{T_m} C_{mt} z_{mt} \ge 1, \quad m = p+1, p+2, \cdots, M \end{aligned} \tag{6}$$

$$DB^{-1} \log z_B = \log z_D. \tag{7}$$

设 $e^T B^{-1} = (u_1, u_2, \cdots, u_{N'+1})$，我们分两种情况讨论规划 (5) 的解：

(i) 若规划 (6) 有解，设 $z_B^* = (z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{N'+1}^*)$，$z_D = (z_{N'+2}, \cdots, z_s)$，$z_D$ 为 (6) 中约束的任意可行解。如将 $z_B^*$ 代入 (7) 中，则 (7) 变为关于 $\log z_D$ 的线性方程组，设该线性方程组的解为 $z_D^*$，若 $z_D^*$ 对规划 (6) 可行，则原规划 (5) 的最优解存在，为 $z^* = (z_B^*, z_D^*)$，且最优值为 $\Sigma_{i=1}^{N'+1} u_i \log z_i$；

(ii) 若规划 (6) 无解，即其可行域中存在一列 $\{z_n^*\}$，使 $\Sigma_{i=1}^{N'+1} u_i \log z_{ni}^* \to -\infty$。若同时 $z_n^*$ 也满足 (7) 式，则原规划 (5) 无解。(这里只讨论了两种简单的情况，其它情况要复杂很多，还要更深入的研究和探讨)。

## 4 数值实例

**例1** 考虑以下问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 0.3 x_1 x_2 \ge 1, \\ & x > 0. \end{aligned}$$

解：根据引理1，原问题可等价的转化为如下问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -\tfrac{1}{2} \log z_1 - \tfrac{1}{2} \log z_2 + \log z_3 \\ \text{s.t.} \quad & z_1 + z_2 \le 1, \\ & 0.3 z_3 \ge 1, \\ & z > 0. \end{aligned}$$

经计算 $d = 0$，于是上述最优化问题等价的分解成两个子问题

$$(\text{I}): \begin{aligned} \min \quad & -\tfrac{1}{2} \log z_1 - \tfrac{1}{2} \log z_2 \\ \text{s.t.} \quad & z_1 + z_2 \le 1, \\ & z_1 > 0, \quad z_2 > 0. \end{aligned} \qquad (\text{II}): \begin{aligned} \min \quad & \log z_3 \\ \text{s.t.} \quad & 0.3 z_3 \ge 1, \\ & z_3 > 0. \end{aligned}$$

解得 $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$，$z_3 = \frac{10}{3}$，于是原问题最小点为 $x_1^* = x_2^* = 1.8258$，最小值 $x_0^* = 6.6665$，这与文献 [1] 的方法得到的结果是相同的。

**例 2** 考虑以下问题

$$\begin{aligned} \min\quad & x_3^{0.8}x_4^{1.2} \\ \text{s.t.}\quad & x_1x_4^{-1}+x_2^{-1}x_4^{-1}\le 1, \\ & x_1^{-2}x_3^{-1}+x_2x_3^{-1}\ge 1, \\ & x>0. \end{aligned}$$

解：原问题可等价地转化为如下问题

$$\begin{aligned} \min\quad & -\log z_1-0.8\log z_2-0.4\log z_3-0.4\log z_4-0.4\log z_5 \\ \text{s.t.}\quad & z_1\le 1, \\ & z_2+z_3\le 1, \\ & z_4+z_5\ge 1, \\ & z>0. \end{aligned}$$

由于 $d=0$，将上述最优化问题等价地分解成三个子问题

$$(\text{I}):\ \begin{aligned} \min\quad & -\log z_1 \\ \text{s.t.}\quad & z_1\le 1, \\ & z_1>0, \end{aligned} \qquad (\text{II}):\ \begin{aligned} \min\quad & -0.8\log z_2-0.4\log z_3 \\ \text{s.t.}\quad & z_2+z_3\le 1, \\ & z_2>0,\quad z_3>0, \end{aligned}$$

$$(\text{III}):\ \begin{aligned} \min\quad & -0.4\log z_4-0.4\log z_5 \\ \text{s.t.}\quad & z_4+z_5\ge 1, \\ & z_4>0,\quad z_5>0. \end{aligned}$$

解得 $z_1=1$，$z_2=\frac{2}{3}$，$z_3=\frac{1}{3}$，$z_4$，$z_5$ 无解。

**例 3** 考虑以下问题

$$\begin{aligned} \min\quad & 120x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\quad & \tfrac{45}{7}x_1^{-3}x_2^{-1}\le 1, \\ & x_1\le 1, \\ & x_1>0,\quad x_2>0. \end{aligned}$$

解：由于 $d=1>0$，故原问题等价的转化为如下问题

$$\begin{aligned} \min\quad & -0.75\log z_1-0.25\log z_2-0.25\log z_3 \\ \text{s.t.}\quad & 120z_1+z_2\le 1, \\ & \tfrac{45}{7}z_3\le 1, \\ & z_4\le 1, \\ & z>0. \end{aligned} \tag{8}$$

$$0.25\log z_1-0.25\log z_2-0.25\log z_3=\log z_4, \tag{9}$$

由 (8) 解得

$$z_1 = 0.0063, \quad z_2 = 0.25, \quad z_3 = \frac{7}{45},$$

将 $z_1$, $z_2$, $z_3$ 代入约束 (9) 中，得 $z_4$=0.6344，显然满足约束 (8)。所以 $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ 是原问题的最优解。代回变换，得原问题最小点为 $x_1^* = 0.6344$, $x_2^* = 25.1762$，最小值 $x_0^* = 100.7055$。

## 参考文献：

[1] Federowicz A J, Rajgopal Jayant. Robustness of polynomial geometric programming optima[J]. Math Prog, 1999, 85: 423-431

[2] Sherali H D. Global optimization of nonconvex polynomial programming problems having rational exponents[J]. Journal of Global Optimization, 1998, 12: 267-283

[3] Shen P P, Zhang K C. Global optimization of signomial geometric programming using linear relaxation[J]. Applied Mathematics and computation, 2004, 150: 99-114

[4] 申培萍，李晓爱. 求符号几何规划全局解的新方法[J]. 工程数学学报，2006, 23(5): 876-880

[5] 王燕军，张可村. 符号几何规划的一种分解方法[J]. 系统科学与数学，2006, 26(4): 385-394

[6] Duffin R J, Peterson E L, Zener C. Geometric Programming Theory and Application[M]. New York: Wiley, 1967: 115-140

# A Decomposition Method for Signomial Geometric Programming with Nonnegative Degree of Difficulty

ZHANG Xiao-mei, WANG Yan-jun

(Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433)

**Abstract:** In this paper, a decomposition algorithm for signomial geometric programming with nonnegative degree of difficulty is proposed. Through the exponential transformation and matrix theory, a problem equivalent to the original problem can be obtained which is a separable programming with lower nonlinear degree. This equivalent problem is decomposed into several subproblems, and the explicit solution to each subproblem can be acquired when the degree of difficulty is zero. At last, some examples are given to verify the feasibility and efficiency of our algorithm.

**Keywords:** signomial geometric programming; degree of difficulty; polynomial geometric programming